О семействах автоматных отображений

Ф. ГЕЧЕГ (Сегед)*)

Как известно, между множеством всех автоматных отображений $\varphi: F(X) \to F(X)$, обладающих фиксированным алфавитом X ($\overline{\overline{X}} < \aleph_0$) и множеством (инициальных) автоматов $\mathbf{A}$, их осуществляющих, можно установить однозначное соответствие $\mathbf{A}_i \to \varphi_i$ так, что произведение $\varphi_1 \dots \varphi_k$ отображений $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ осуществляется суперпозицией $\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_k$ автоматов $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$. Таким образом, если мы интересуемся отображениями, осуществляемыми суперпозициями некоторых автоматов $\mathbf{A}_i$ ($i=1, \dots, k$), то достаточно ограничиваться исследованием подполугруппы с образующими $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ полугруппы H_X всех автоматных отображений $\varphi: F(X) \to F(X)$.

Б. Чакань предложил поставить в соответствие классу всех конечных автоматов некоторую алгебраическую систему так, что — аналогично вышесказанным — при рассмотрении отображений, осуществляемых композициями (произведениями) некоторого типа данных конечных автоматов можно было ограничиваться рассмотрением подсистемы, порожденной соответствующими элементами этой алгебраической системы. В настоящей статье дается решение этой проблемы относительно R-произведений [1]. При этом доказывается, что с точки зрения представления отображений квази-суперпозиция автоматов, введенная в [2] равносильна R-произведению тех же автоматов.

§ 1

X и Y будут обозначать произвольные конечные множества. Пусть $\varphi: F(X) \to F(Y)$ — произвольное автоматное отображение, а $\varphi_p: F(X) \to F(Y)$ $\big(p \in F(X)\big)$ — отображение, переводящее слово $q\big(\in F(X)\big)$ в слово r, удовлетворяющее равенству $\varphi(pq) = \varphi(p)r$ [1]). Следуя Рэни [3], мы будем называть φ_p *состоянием* отображения φ. Мы говорим, что φ — отображение *веса* n (обозначение: $s(\varphi)=n$), если φ обладает n различными состояниями. φ называется отображением *конечного веса*, если $n < \aleph_0$. Класс всех автоматных отображений конечного веса будем обозначать через L. Для начального

---

*) F. GÉCSEG (Szeged).

[1]) $F(X)$ — свободная полугруппа с системой образующих X, e — единичный элемент полугруппы $F(X)$, удовлетворяющий равенствам $\varphi(e)=e$ и $\varphi_e=\varphi$.

отрезка $p'=x_1\ldots x_i$ $(0\leqq i\leqq n)$ слова $p=x_1\ldots x_n$ будем пользоваться обозначением $p(i+1)$. В частности, $p(1)=e$ и $p(n+1)=p$.

Пусть $\varphi: F(X)\to F(Y)$ — любое отображение конечного веса, V и Z — произвольные конечные множества, а ϑ и ϑ' — однозначные отображения V в X и $\langle\varphi_p|p\in F(X)\rangle\times V$ в Z, соответственно.

Отображения ϑ и ϑ' мы продолжим и на $F(V)$: если $q=v_1\ldots v_n\in F(V)$, то

$$\vartheta(v_1\ldots v_n)=\vartheta(v_1)\ldots\vartheta(v_n)$$

и

$$\vartheta'(\varphi_p, q)=\vartheta'(\varphi_{p(\vartheta(q)(1))}, v_1)\ldots\vartheta'(\varphi_{p(\vartheta(q)(n))}, v_n).$$

Отображение $\psi: F(V)\to F(Z)$, для которого выполняется $\psi(q)=\vartheta'(\varphi, q)$ $(q\in F(V))$, будем называть *производным отображением* от φ и обозначать через $(\varphi, \vartheta, \vartheta')$, если только необходимо знать, о каких отображениях (ϑ, ϑ') идет речь.[2] Отношение между отображением и его производным выражается символом $\prec$ (например $\psi\prec\varphi$).

Подкласс L_i класса L назовем *семейством отображений*, если L_i содержит вместе с каждым отображением $\varphi\in L_i$ и все производные от φ. Подмножество $\langle\varphi_1, \ldots, \varphi_k\rangle$ семейства L_i $(L_i\subseteqq L)$ назовем *базисом* L_i (обозначение: $L_i=[\varphi_1, \ldots, \varphi_k]$), если любое $\varphi\in L_i$ является производным хотя бы от одного φ_j $(j=1, \ldots, k)$. Естественным путем определяются семейства с конечным базисом. Такие семества в дальнейшем будут отличаться — вместо оговорки — жирным шрифтом.

Пусть $\varphi: F(X)\to F(Y)$ и $\psi: F(V)\to F(Z)$ — произвольные отображения конечного веса. Определим отображение ξ множества $F(X\times V)$ в множество $F(\langle\varphi_p|p\in F(X)\rangle\times\langle\psi_q|q\in F(V)\rangle)$ следующим образом:

$$\xi((p, q))=(\varphi, \psi)_{(p,q)(1)}\ldots(\varphi, \psi)_{(p,q)(n)}=(\varphi_{p(1)}, \psi_{q(1)})\ldots(\varphi_{p(n)}, \psi_{q(n)}),$$

где $n=d((p, q))=d(p)=d(q)$ ($d(p)$ обозначает длину слова p). Нетрудно показать, что $\xi\in L$ и вес ξ не больше произведения весов φ и ψ. ξ называется *прямой суммой* отображений φ и ψ. Мы пишем: $\xi=\varphi+\psi$.

Берем совокупность $\mathbf{L}$ всех семейств отображений с конечным базисом. В $\mathbf{L}$ мы вводим две двуместных операции: *сложение* и *произведение*, которые

---

[2]) Пусть $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, a_0, Y, \delta, \lambda)$ — минимальный автомат, индуцирующий отображение φ. Как известно, в качестве множества A можно брать $\langle\varphi_p|p\in F(X)\rangle$. В этом случае

$$\delta(\varphi_p, x)=\varphi_{px},$$

$$\lambda(\varphi_p, x)=\varphi_p(x).$$

Рассмотрим произвольные конечные множества V и Z, далее, однозначные отображения $\vartheta: V\to X$ и $\vartheta': \langle\varphi_p|p\in F(X)\rangle\times V\to Z$. Обозначим через $\mathbf{B}=\mathbf{B}(V, A, a_0, Z, \delta', \lambda')$ автомат, для которого выполняется

$$\delta'(\varphi_p, v)=\delta(\varphi_p, \vartheta(v)),$$

$$\lambda'(\varphi_p, v)=\vartheta'(\varphi_p, v)\qquad(\varphi_p\in A,\quad v\in V).$$

Нетрудно показать, что $(\varphi, \vartheta, \vartheta')$ не что иное, как отображение, индуцируемое автоматом $\mathbf{B}$.

Заметим еще, что отношение $\prec$ — транзитивно.

обозначим символами $\oplus$ и $\odot$, соответственно. А именно, для произвольных $\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j \in \mathbf{L}$ пусть

$$\mathbf{L}_i \oplus \mathbf{L}_j = \bigcup_{\varphi_i, \psi_j} [\varphi_i + \psi_j] \, (\varphi_i \in \mathbf{L}_i, \psi_j \in \mathbf{L}_j);$$

и

$$\mathbf{L}_i \odot \mathbf{L}_j = \bigcup_{\varphi_i, \psi_j} [\varphi_i \psi_j] \, \big(\varphi_i(: F(X) \to F(Y)) \in \mathbf{L}_i, \;\; \psi_j(: F(Y) \to F(Z)) \in \mathbf{L}_j\big).$$

Автоматное отображение $\psi\colon F(U) \to F(V)$ назовем *гомоморфным образом* отображения $\varphi\colon F(X) \to F(Y)$, если найдутся такие однозначные отображения X на U и Y на V: ξ и ξ' соответственно, что для любого $p \in F(X)$ имеет место соотношение $\xi'(\varphi(p)) = \psi(\xi(p))$. Здесь ξ и ξ' продолжены на $F(X)$ и $F(Y)$ естественным (гомоморфным в обычном смысле слова) образом. Если ξ и ξ' являются взаимно однозначными, то мы говорим, что φ и ψ *изоморфны* и пишем $\varphi \cong \psi$.

Отметим, что одновременное выполнение $\varphi \cong \psi$ и $\varphi \in \mathbf{L}_i$ влечет за собой $\psi \in \mathbf{L}_i$. Далее, из соотношений $\varphi \cong \psi$ и $\varphi' \cong \psi'$ не обязательно вытекает $\varphi\varphi' \cong \psi\psi'$.

Следует также отметить, что результаты этой статьи могли бы быть получены и без употребления термина „класс", если вместо любого множества из n элементов было бы рассмотрено фиксированное множество $\langle 1, \ldots, n \rangle$. Это, однако, привело бы к громоздким вычислениям, не дающим нам ничего существенно нового.

§ 2

В этой части производится несколько более подробное исследование понятий, введенных в § 1. Относительно производных автоматных отображений имеет место

Лемма 1. *Если $\varphi \in L$, то и любое производное ψ от φ содержится в L; далее, $s(\psi) \leqq s(\varphi)$.*

Сперва покажем, что если имеет место $\psi \prec \varphi$, то и ψ является автоматным отображением, т. е. ψ сохраняет длину слов и начальный отрезок слов отображает в начальный отрезок образа. Пусть $\psi(: F(V) \to F(Z)) = \big(\varphi(: F(X) \to F(Y)), \gamma, \gamma'\big)$. По определению производного отображения очевидно, что ψ сохранит длин слов.

Пусть $q = v_1 \ldots v_n$, $r = v_{n+1} \ldots v_m$ $(q, r \in F(V))$ — произвольные слова. Тогда выполняется равенство

$$\psi(qr) = \psi(v_1 \ldots v_n v_{n+1} \ldots v_m) = \gamma'(\varphi_{\gamma(q)(1)}, v_1) \ldots \gamma'(\varphi_{\gamma(q)(n)}, v_n) \cdot \gamma'(\varphi_{\gamma(qr)(n+1)}, v_{n+1}) \ldots$$
$$\ldots \gamma'(\varphi_{\gamma(qr)(m)}, v_m) = \psi(q)s \qquad (s \in F(Z)),$$

т. е. ψ отображает начальный отрезок слов в начальный отрезок образа.

Надо еще доказать, что выполняется и $s(\psi) \leqq s(\varphi)$. Для этой цели достаточно показать, что из равенств $\gamma(q) = p$, $\gamma(q') = p'$ и $\varphi_p = \varphi_{p'}$ $\big(q, q' \in F(V);\; p, p' \in F(X)\big)$ следует равенство $\psi_q = \psi_{q'}$. Последнее утверждение верно, так как для произвольного $r \in F(V)$ имеет место равенство $\psi_q(r) = \gamma'(\varphi_{\gamma(q)}, r) = \gamma'(\varphi_{\gamma(q')}, r) = \psi_{q'}(r)$.

Лемма 2. *Если* $\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j \in \mathbf{L}$, *то* $\mathbf{L}_i \oplus \mathbf{L}_j \in \mathbf{L}$ *и* $\mathbf{L}_i \odot \mathbf{L}_j \in \mathbf{L}$.

Ввиду транзитивности отношения $\prec$, по определению суммы и произведения очевидно, что сумма и произведение двух семейств отображений является семейством отображений. Далее, так как вес $\varphi+\psi$, $\varphi\psi$ и производных отображений от них не больше чем $s(\varphi)s(\psi)$, то существует такое натуральное число n, что для всех $\xi \in \mathbf{L}_i \oplus \mathbf{L}_j$ и $\xi \in \mathbf{L}_i \odot \mathbf{L}_j$ справедливы неравенства $s(\xi) \leqq n$. Поэтому, если мы покажем, что каждое такое семейство $L'(\subseteqq L)$ отображений, для которого при фиксированном натуральном n выполняется $s(\varphi) \leqq n$ $(\varphi \in L')$, обладает конечным базисом, то и получается доказательство леммы 2.

Итак, пусть L' — такое семейство отображений, для которого существует натуральное n так, что $s(\varphi) \leqq n$ справедливо для всех $\varphi \in L'$. Пусть $\varphi\colon F(X) \to F(Y)$ $(\varphi \in L')$ — некоторое отображение, где $\overline{\overline{X}} > n^n$. В этом случае найдутся два символа $x, x' \in X$ таких, что для всех $p \in F(X)$ имеем $\varphi_{px} = \varphi_{px'}$. Действительно, так как число всех однозначных отображений в себя множества из n элементов равно n^n, то наше утверждение справедливо.[3] Пусть $\overline{\varphi}\colon F(X^*) \to F(\langle \varphi_p | p \in F(X) \rangle)$ $(X^* = X \setminus x')$ — отображение, переводящее слово $x_1 \ldots x_l \in F(X^*)$ в слово $\varphi\,\varphi_{x_1} \ldots \varphi_{x_1 \ldots x_{l-1}}$. Очевидно, что $\overline{\varphi}$ представяется в виде

$$\overline{\varphi} = (\varphi, \vartheta, \vartheta') \quad (\vartheta\colon X^* \to X,\ \vartheta'\colon \langle \varphi_p | p \in F(X) \rangle \times X^* \to \langle \varphi_{\overline{p}} | \overline{p} \in F(X^*) \rangle),$$

где $\vartheta(\overline{x}) = \overline{x}$ и $\vartheta'(\varphi_{\overline{p}}, \overline{x}) = \varphi_{\overline{p}}$ $(\overline{x} \in X^*, \overline{p} \in F(X^*))$, т. е. $\overline{\varphi} \prec \varphi$. Покажем, что выполняется и отношение $\varphi \prec \overline{\varphi}$, иными словами, имеет место равенство $\varphi = (\overline{\varphi}, \gamma, \gamma')$, где γ, γ' — подходящие отображения. Определим $\gamma\colon X \to X^*$ и $\gamma'\colon \langle \varphi_p | p \in F(X^*) \rangle \times X \to Y$ следующим образом:

$$\gamma(x_i) = \begin{cases} x_i, & \text{если} \quad x_i \neq x' \\ x, & \text{если} \quad x_i = x' \end{cases} \quad \text{и} \quad \gamma'(\overline{\varphi}_p, x_i) = \varphi_p(x_i) \, (p \in F(X^*)).$$

Нетрудно доказать, что для этой пары (γ, γ') справедливо равенство $\varphi = (\overline{\varphi}, \gamma, \gamma')$. Но $\overline{\overline{X^*}} < \overline{\overline{X}}$, и таким образом, продолжая этот процесс, принимая во внимание транзитивность отношения $\prec$ и конечность[4] числа отображений $\varphi\colon F(X) \to F(\langle \varphi_p | p \in F(X) \rangle)$, при $\overline{\overline{X}} \leqq n^n$ и $s(\varphi) \leqq n$ получается, что L' обладает конечным базисом. Этим лемма 2 доказана.

Относительно произведения семейств отображений справедлива следующая

Лемма 3. *Для любых элементов* $\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j \in \mathbf{L}$ *выполняется равенство*

$$\mathbf{L}_i \odot \mathbf{L}_j = \langle \varphi_i \psi_j |\ \varphi_i (\colon F(X) \to F(Y)) \in \mathbf{L}_i,\ \ \psi_j (\colon F(Y) \to F(Z)) \in \mathbf{L}_j \rangle.$$

Пусть ε имеет вид $\varepsilon = (\varphi\psi, \gamma, \gamma') \in \mathbf{L}_i \odot \mathbf{L}_j$, где $\varepsilon\colon F(U) \to F(V)$, $\varphi\colon F(X) \to F(Y)$ и $\psi\colon F(Y) \to F(Z)$ $(\varphi \in \mathbf{L}_i, \psi \in \mathbf{L}_j)$. Покажем существование таких $\varphi' \prec \varphi$ и $\psi' \prec \psi$,

[3]) Здесь речь идет об отображениях $x\colon \varphi_p \to \varphi_{px}$, где φ и $x \in X$ — фиксированы; $p \in F(X)$ и $\varphi \in L'$, т. е. $\overline{\overline{\langle \varphi_p | p \in F(X) \rangle}} \leqq n$.

[4]) Здесь изоморфные отображения считаются тождественными.

что $\varepsilon=\varphi'\psi'$. Рассмотрим отображения

$$\varphi'\big(:F(U)\to F(U\times\langle\varphi_p|p\in F(X)\rangle\times Y)\big)=(\varphi,\varrho,\varrho')$$
$$\big(\varrho':\langle\varphi_p|p\in F(X)\rangle\times U\to U\times\langle\varphi_p|p\in F(X)\rangle\times Y\big)$$

и

$$\psi'\big(:F(U\times\langle\varphi_p|p\in F(X)\rangle\times Y)\to F(V)\big)=(\psi,\vartheta,\vartheta'),$$

где

$$\varrho(u)=\gamma(u),\ \varrho'(\varphi_p,u)=\big(u,\varphi_p,\varphi_p(\varrho(u))\big)\,(p\in F(X),u\in U)$$

и

$$\vartheta(u,\varphi_p,y)=y,\ \vartheta'\big(\psi_q,(u,\varphi_p,y)\big)=\gamma'\big((\varphi_p,\psi_q),u\big)\big(q\in F(Y)\big).$$

Пусть $r=u_1\dots u_n\in F(U)$ — произвольное слово. Тогда

$$\varepsilon(r)=\gamma'\big((\varphi\psi),u_1\big)\dots\gamma'\big((\varphi\psi)_{\gamma(r)(n)},u_n\big)=\gamma'\big((\varphi,\psi),u_1\big)\dots$$
$$\dots\gamma'\big((\varphi_{\gamma(r)(n)},\psi_{\varphi(\gamma(r)(n))}),u_n\big)$$

и

$$\varphi'(r)=\varrho'(\varphi,u_1)\dots\varrho'(\varphi_{\varrho(r)(n)},u_n)=\big(u_1,\varphi,\varphi(\varrho(u_1))\big)\dots\big(u_n,\varphi_{\varrho(r)(n)},\varphi_{\varrho(r)(n)}(\varrho(u_n))\big)=$$
$$=\big(u_1,\varphi,\varphi(\gamma(u_1))\big)\dots\big(u_n,\varphi_{\gamma(r)(n)},\varphi_{\gamma(r)(n)}(\gamma(u_n))\big);$$
$$(\varphi'\psi')(r)=\psi'\big(\varphi'(r)\big)=\psi'\big((u_1,\varphi,\varphi(\gamma(u_1)))\dots(u_n,\varphi_{\gamma(r)(n)},\varphi_{\gamma(r)(n)}(\gamma(u_n)))\big)=$$
$$=\vartheta'\big(\psi,(u_1,\varphi,\varphi(\gamma(u_1)))\big)\dots\vartheta'\big(\psi_{\varphi(\gamma(r)(n))},(u_n,\varphi_{\gamma(r)(n)}(\gamma(u_n)))\big)=$$
$$=\gamma'\big((\varphi,\psi),u_1\big)\dots\gamma'\big((\varphi_{\gamma(r)(n)},\psi_{\varphi(\gamma(r)(n))}),u_n\big);$$
$$\varepsilon(r)=(\varphi'\psi')(r).$$

Лемма 3 доказана.

Предложение. *Множество* $\mathbf{L}$ *является структурно упорядоченной алгебраической системой относительно сложения, умножения и теоретико-множественного включения.*

Для того, чтобы $\mathbf{L}$ при упорядочении $\subseteq$ образовало структуру относительно операций пересечения и объединения, достаточно показать, что пересечение $\mathbf{L}_i\cap\mathbf{L}_j$ произвольных $\mathbf{L}_i$, $\mathbf{L}_j\in\mathbf{L}$ обладает конечным базисом; аналогичное утверждение справедливо, очевидно, для объединений. $\mathbf{L}_i\cap\mathbf{L}_j\neq\emptyset$, так как $[\varphi]\subseteq\mathbf{L}_i$ выполняется для всех $\mathbf{L}_i$, где $s(\varphi)=1$. Далее, мы видим, что $\mathbf{L}_i\cap\mathbf{L}_j$ является семейством отображений. Так как весы отображений, содержащихся в $\mathbf{L}_i$ или $\mathbf{L}_j$ имеют общую верхнюю границу, то и весы отображений из $\mathbf{L}_i\cap\mathbf{L}_j$ обладают общей верхней границей. Отсюда, в силу леммы 2, получается существование конечного базиса для $\mathbf{L}_i\cap\mathbf{L}_j$.

Теперь покажем ассоциативность сложения и умножения, т. е. докажем справедливость равенств $(\mathbf{L}_i\oplus\mathbf{L}_j)\oplus\mathbf{L}_k=\mathbf{L}_i\oplus(\mathbf{L}_j\oplus\mathbf{L}_k)$ и $(\mathbf{L}_i\odot\mathbf{L}_j)\odot\mathbf{L}_k=\mathbf{L}_i\odot$ $\odot(\mathbf{L}_j\odot\mathbf{L}_k)$ для всех $\mathbf{L}_i,\mathbf{L}_j,\mathbf{L}_k\in\mathbf{L}$.

Ассоциативность произведения, в силу леммы 3, тривиально, так как произведение отображений является ассоциативным. Ассоциативность сложения вытекает из того, что элементы из $(\mathbf{L}_i\oplus\mathbf{L}_j)\oplus\mathbf{L}_k$ и только они представляются в виде $\big((\varphi+\psi+\tau),\gamma,\gamma'\big)$ $(\varphi\in\mathbf{L}_i,\psi\in\mathbf{L}_j,\tau\in\mathbf{L}_k)$; то же самое верно для элементов из $\mathbf{L}_i\oplus(\mathbf{L}_j\oplus\mathbf{L}_k)$.

Для завершения доказательства нашего предложения надо еще показать (см. [4] стр. 191), что имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{L}_i \oplus (\mathbf{L}_j \cup \mathbf{L}_k) = (\mathbf{L}_i \oplus \mathbf{L}_j) \cup (\mathbf{L}_i \oplus \mathbf{L}_k),$$

$$(\mathbf{L}_j \cup \mathbf{L}_k) \oplus \mathbf{L}_i = (\mathbf{L}_j \oplus \mathbf{L}_i) \cup (\mathbf{L}_k \oplus \mathbf{L}_i)$$

$$\mathbf{L}_i \odot (\mathbf{L}_j \cup \mathbf{L}_k) = (\mathbf{L}_i \odot \mathbf{L}_j) \cup (\mathbf{L}_i \odot \mathbf{L}_k),$$

и

$$(\mathbf{L}_j \cup \mathbf{L}_k) \odot \mathbf{L}_i = (\mathbf{L}_j \odot \mathbf{L}_i) \cup (\mathbf{L}_k \odot \mathbf{L}_i) \quad (\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j, \mathbf{L}_k \in \mathbf{L}).$$

Это, однако, вытекает из самого определения сложения и умножения. Отсюда получается и монотонность этих операций.

Заметим, что семейство $\mathbf{L}_i$ $(\in \mathbf{L})$ отображений, для отображения φ которого выполняется $s(\varphi)=1$, является единичным элементом для умножения и сложения. Поэтому мы его обозначим через $\mathbf{L}_e$.

§ 3

Операции и структурное упорядочение, введенные в предыдущих параграфах, связаны между собой, кроме монотонности, и следующим законом.

Теорема 1. *Для любых* $\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j \in \mathbf{L}$ *имеет место* $\mathbf{L}_i \oplus \mathbf{L}_j \subseteqq \mathbf{L}_i \odot \mathbf{L}_j$.

Для доказательства теоремы 1, ввиду определения сложения и транзитивности отношения $\prec$, достаточно показать, что для произвольных φ, ψ $(\varphi \in \mathbf{L}_i, \psi \in \mathbf{L}_j)$ выполняется $\varphi + \psi \in \mathbf{L}_i \odot \mathbf{L}_j$. Пусть φ и ψ имеют вид $\varphi: F(X) \to F(Y)$ и $\Psi: F(V) \to F(Z)$. Рассмотрим отображения φ' и ψ', определенные следующим образом: $\varphi' = (\varphi, \gamma, \gamma')$ и $\psi' = (\psi, \vartheta, \vartheta')$, где

$$\gamma((x, v)) = x, \quad \gamma'(\varphi_p, (x, v)) = (x, v, \varphi_p),$$

$$\vartheta((x, v, \varphi_p)) = v, \quad \vartheta'(\psi_q, (x, v, \varphi_p)) = (\varphi_p, \psi_q)$$

$$((x, v) \in X \times V, \quad p \in F(X), \quad (x, v, \varphi_p) \in X \times V \times \langle \varphi_p | p \in F(X) \rangle, \quad q \in F(V)).$$

Покажем, что $\varphi + \psi = \varphi' \psi'$. Отсюда, ввиду $\varphi' \prec \varphi$ и $\psi' \prec \psi$, получим доказательство теоремы 1.

Пусть $r = (x_1, v_1) \dots (x_n, v_n) \in F(X \times V)$ — произвольное слово. Тогда

$$(\varphi' \psi')(r) = \psi'(\varphi'(r)) = \psi'((x_1, v_1, \varphi_{r(1)_1})) \dots (x_n, v_n, \varphi_{r(n)_1})) = (\varphi_{r(1)_1}, \psi_{r(1)_2}) \dots$$

$$\dots (\varphi_{r(n)_1}, \psi_{r(n)_2}) = (\varphi, \psi)_{r(1)} \dots (\varphi, \psi)_{r(n)} = (\varphi + \psi)(r) \ ^{5)}.$$

Этим теорема 1 доказана.

Следствие. *Если* $\mathbf{L}_k \in \mathbf{L}$ *получается из элементов* $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_m$ *путем* l-*кратного применения сложения и умножения, то существует такое* $\mathbf{L}'_k \in \mathbf{L}$, $\mathbf{L}'_k \supseteqq \mathbf{L}_k$, *которое получается из* $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_m$ *путем* l-*кратного применения единственного умножения.*

---

[5]) Здесь $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)_i$ $(i=1, 2)$ означает слово $x_1 \dots x_n$, если $i=1$, и слово $y_1 \dots y_n$, если $i=2$.

В самом деле, такое $\mathbf{L}'_k$ получается из $\mathbf{L}_k$, заменяя в выражении $\mathbf{L}_k$ через $\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_m$ знак $\oplus$ везде знаком $\odot$.

Автомат $\mathbf{A} = \mathbf{A}(X, A, a_0, A, \delta, \lambda)$ называется автоматом Медведева, если для всех $a \in A$ и $x \in X$ имеет место $\lambda(a, x) = a$.

Рассмотрим конечное или бесконечное множество $\mathfrak{A}$ конечных автоматов Медведева и пусть $R = \langle 1, \ldots, k \rangle$ — некоторое частично упорядоченное множество. Каждому элементу $i \in R$ однозначно сопоставим элемент из $\mathfrak{A}$. Автомат, сопоставляемый элементу i, мы будем обозначать через $\mathbf{A}_i$. Пусть X, Y — любые конечные множества, а ξ и χ — отображения, отображающие $A_1 \times \ldots \times A_k \times X$ в $X_1 \times \ldots \times X_k$ и в Y, соответственно. Автомат $\mathbf{A} = \mathbf{A}(X, A, a_0, Y, \delta, \lambda)$ мы будем называть R-произведением автоматов $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ относительно множеств X, Y и отображений ξ, χ, если выполняются условия:

(1) $$A = A_1 \times \ldots \times A_k,$$

(2) $$a_0 = (a_{10}, \ldots, a_{k0}),$$

(3) $$\delta\big((a_1, \ldots, a_k), x\big) = \big(\delta_1(a_1, x_1), \ldots, \delta_k(a_k, x_k)\big),$$

где
$$(x_1, \ldots, x_k) = \xi(a_1, \ldots, a_k, x) = \big(\xi_1(a_1, \ldots, a_k, x), \ldots, \xi_k(a_1, \ldots, a_k, x)\big)$$

и ξ_i $(1 \leq i \leq k)$ не зависит от элементов из A_j, если j не больше, чем i относительно частичного упорядочения R,

(4) $$\lambda\big((a_1, \ldots, a_k), x\big) = \chi(a_1, \ldots a_k, x).$$

Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}(X', A, a_0, \delta')$ означает произвольный автомат Медведева; X, Y — любые множества, а $\gamma\colon X \to X'$, $\lambda\colon A \times X \to Y$ — произвольные отображения. Через $\mathbf{A}^{(\gamma, \lambda)} = \mathbf{A}^{(\gamma, \lambda)}(X, A, a_0, Y, \delta, \lambda)$ мы обозначим автомат, выходной функцией которого является λ, а для функции перехода выполняется $\delta(a, x) = \delta'(a, \gamma(x))$ $(a \in A, x \in X)$.

Суперпозицию $\mathbf{A}_1^{(\gamma_1, \lambda_1)} \ldots \mathbf{A}_k^{(\gamma_k, \lambda_k)}$ (если существует) мы назовем квази-суперпозицией относительно $\langle X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i | i = 1, \ldots, k \rangle$ автоматов $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(X'_i, A_i, a_{i_0}, \delta'_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Понятно, что квази-суперпозиция является частным случаем R-произведения.

В этом параграфе φ^i означает отображение, индуцируемое автоматом $\mathbf{A}_i$. Обратно, если задано автоматное отображение φ^i, то $\mathbf{A}_i$ служит для обозначения некоторого из автоматов, индуцирующих φ^i.

Подсистему с образующими $\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_k$ алгебраической системы $\mathbf{L}$ мы обозначим через $\{\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_k\}$.

Алгебраическая система $\mathbf{L}$ и R-произведения автоматов тесно связаны между собой, как показывает

Теорема 2. *Автоматное отображение φ представляется некоторым R-произведением автоматов Медведева $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ тогда и только тогда, если существует такое $\mathbf{L}^*\{\in[\varphi^1], \ldots, [\varphi^k]\}$, что выполняется $\varphi \in \mathbf{L}^*$*

Предположим, что φ представляется R-произведением $\mathbf{A}$ автоматов $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$, относительно множеств X, Y и отображений ξ, χ. Доказательство проведем индукцией по числу l сомножителей R-произведения. Впервые пусть — $i=1$, т. е. $\mathbf{A}$ обладает единственным сомножителем $\mathbf{A}_i=\mathbf{A}_i(X_i, A_i, a_{i_0}, \delta_i)$. Покажем, что φ представляется в виде $(\varphi^i, \gamma, \gamma')$, где γ, γ' — подходящие отображения. Пусть $\gamma(x)=\xi(x)$ и $\gamma'(\varphi^i_{\gamma(p)}, x)=\chi(a_{i_0}\cdot\gamma(p), x)$. Такой выбор отображения γ' является однозначным, так как для любого отображения φ^i, индуцируемого автоматом Медведева, из $\varphi^i_{pi}=\varphi^i_{qi}$ вытекает $a_{i0}p_i=$ $=a_{i_0}q_i(p_i, q_i\in F(X_i))$. Далее, пусть $p=x_1...x_n\in F(X)$ — произвольное слово. Тогда, выполняется равенство $\gamma'(\varphi^i, p)=\gamma'(\varphi^i, x_1)\cdot\gamma'(\varphi^i_{\gamma(p)(2)}, x_2)...\gamma'(\varphi^i_{\gamma(p)(n)}, x_n)=$ $=\chi(a_{i_0}, x_1)\cdot\chi(a_{i_0}(\gamma(p)(2)), x_2)...\chi(a_{i_0}(\gamma(p)(n)), x_n)=\varphi(p)$. Этим случай $l=1$ исчерпан. Пусть наше утверждение справедливо для чисел, меньших чем $l(\geqq 2)$ и пусть φ представляется R-произведением $\mathbf{A}$ автоматов $\mathbf{A}_j\in\langle\mathbf{A}_i | i=1, ...$ $..., k\rangle$ $(j=1, ..., l)$ относительно множеств X, Y и отображений ξ, χ. Пусть $\mathbf{A}_l$ — один из минимальных элементов относительно частичного упорядочения R. Теперь рассмотрим R_1-произведение $\mathbf{A}'=\mathbf{A}'(X', A', a_0', Y', \delta', \lambda')$ автоматов $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_{l-1}$ относительно $X'=X$, $Y'=A_1\times...\times A_{l-1}\times X$, $\xi': A_1\times...$ $...\times A_{l-1}\times X\to X_1\times...\times X_{l-1}$, $\chi': A_1\times...\times A_{l-1}\times X\to A_1\times...\times A_{l-1}\times X$ и тривиальное R_2-произведение $\mathbf{A}''=\mathbf{A}''(X'', A'', a_0'', Y'', \delta'', \lambda'')$ автомата $\mathbf{A}_l$ относительно $X''=A_1\times...\times A_{l-1}\times X$, $Y''=Y$, $\xi'': A_1\times...\times A_{l-1}\times X\to X_l$, $\chi'': A_1\times...$ $...\times A_{l-1}\times X\to Y$, где R_1 получается ограничением R на множество $\langle 1, ..., l-1\rangle$. Более точно, пусть выполняются

$$\xi'(a_1, ..., a_{l-1}, x)=(\xi_1(a_1, ..., a_{l-1}, a_l, x)...\xi_{l-1}(a_1, ..., a_{l-1}, a_l, x)),$$

$$\chi'(a_1, ..., a_{l-1}, x)=(a_1, ..., a_{l-1}, x),$$

$$\xi''(a_l, (a_1, ... a_{l-1}, (x)=\xi_l(a_1, ..., a_{l-1}, a_l, x),$$

$$\chi''(a_l, (a_1, ..., a_{l-1}, x))=\chi(a_1, ..., a_{l-1}, a_l, x).$$

(В определении ξ' $a_l\in A_l$ — произвольнний.) Определение ξ' не может содержать противоречие, так как ξ_i $(i=1, ..., l)$ не зависит от $a_l(\in A_l)$. Обозначим через φ' и φ'' отображение, индуцируемое автоматом $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}''$, соответственно. Докажем, что $\varphi=\varphi'\varphi''$. Для доказательства этого достаточно показать, что можно установить инициальный $\mathfrak{A}$-изоморфизм (см. [5]) между $\mathbf{A}$ и суперпозицией $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^*(X, A^*, a_0^*, Y, \delta^*, \lambda^*)=\mathbf{A}'\mathbf{A}''$. Рассмотрим тождественные отображения множеств $X, A_1\times...\times A_l$ и Y на себя. Они и дают искомый изоморфизм. Пусть $x\in X$, $(a_1, ..., a_l)\in A_1\times...\times A_l$ — произвольные. Тогда

$$\delta((a_1, ..., a_l), x)=(\delta_1(a_1, \xi_1(a_1, ..., a_l, x)), ..., \delta_l(a_l, \xi_l(a_1, ..., a_l, x)))$$

и

$$\delta^*((a_1, ..., a_l), x)=(\delta'((a_1, ..., a_{l-1}), x), \delta''(a_l, \lambda'((a_1, ..., a_{l-1}), x)))=$$

$$=(\delta_1(a_1, \xi_1(a_1, ..., a_l, x)), ..., \delta_l(a_l, \xi_l(a_1, ..., a_l, x))),$$

т. е.

$$\delta((a_1, ..., a_l), x)=\delta^*((a_1, ..., a_l), x).$$

Аналогично,

$$\lambda((a_1, ..., a_l), x)=\psi(a_1, ..., a_l, x)$$

и

$$\lambda^*((a_1, ..., a_l), x)=\lambda''(a_l, \lambda'((a_1, ..., a_{l-1}), x))=$$

$$=\lambda''(a_l, (a_1, ..., a_{l-1}, x))=\psi(a_1, ..., a_l, x),$$

т. е.

$$\lambda((a_1, \ldots, a_l), x) = \lambda^*((a_1, \ldots, a_l), x).$$

Этим показано, что $\varphi = \varphi'\varphi''$. Но в силу индуктивного предположения для φ' и φ'' выполняется $\varphi' \in \mathbf{L}' \in \{[\varphi^1], \ldots, [\varphi^k]\}$ и $\varphi'' \in \mathbf{L}'' \in \{[\varphi^1], \ldots, [\varphi^k]\}$, соответственно. Необходимость теоремы 2 этим доказана.

Обратно, предположим, что $\varphi \in \mathbf{L}^* \in \{[\varphi^1], \ldots, [\varphi^k]\}$. Путем индукции мы покажем, что φ представляется некоторой *квази-суперпозицией* автоматов из $\langle \mathbf{A}_i | i=1, \ldots, k\rangle$. Впервые, пусть выполняется $\varphi \in [\varphi^i]$ и $\varphi(: F(X) \to F(Y)) = (\varphi^i(: F(X_i) \to F(Y_i)), \gamma, \gamma')$. Тогда φ индуцируется автоматом $\mathbf{A}_i^{(\gamma, \lambda)}$, где $\lambda = \gamma'$. Действительно, так как $\mathbf{A}_i$ является автоматом Медведева, то $\varphi^i_{p_i} = \varphi^i_{q_i}$ $(p_i, q_i \in F(X_i))$ тогда и только тогда, если $a_{i_0} p_i = a_{i_0} q_i$. Поэтому, принимая во внимание конструкцию автомата $\mathbf{A}_i^{(\gamma, \lambda)}$ вытекает справедливость нашего утверждения.

Теперь предположим, сто φ принадлежит к такому $\mathbf{L}^*$, которое получается из $[\varphi^1], \ldots, [\varphi^k]$ путем $l(\geqq 2)$-кратного применения сложения и умножения. Тогда, по следствию теоремы 1, отображение φ содержится в элементе $\mathbf{L}^{**}$ совокупности $\mathbf{L}$, получающемся из $[\varphi^1], \ldots, [\varphi^k]$ путем l-кратного применения единственного умножения, т. е. $\varphi = \psi_1 \ldots \psi_l$ $(\psi_i \in \langle [\varphi^1] \cup \ldots \cup [\varphi^k]\rangle$, $i=1, \ldots, l)$. В силу индуктивного предположения $\psi_1 \ldots \psi_{l-1}$ представляется некоторой *квази-суперпозицией* $\mathbf{A}_1^{(\gamma_1, \lambda_1)} \ldots \mathbf{A}_{l-1}^{(\gamma_{l-1}, \lambda_{l-1})}$ автоматов $\mathbf{A}_j (\in \langle \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k\rangle)$ $(j=1, \ldots, l-1)$, а φ_l — как выше указано — индуцируется некоторым автоматом $\mathbf{A}_i^{(\gamma_i, \lambda_i)}$ $(\mathbf{A}_i \in \langle \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k\rangle)$. Таким образом $\varphi = \psi_1 \ldots \psi_{l-1}\psi_l$ представляется суперпозицией $\mathbf{A}_1^{(\gamma_1, \lambda_1)} \ldots \mathbf{A}_{l-1}^{(\gamma_{l-1}, \lambda_{l-1})} \cdot \mathbf{A}_i^{(\gamma_i, \lambda_i)}$, т. е. одной из *квази-суперпозиций* автоматов $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$. Этим теорема 2 полностью доказана.

Из теоремы 2, принимая во внимание и доказательство достаточности этой теоремы, вытекает

Теорема 3. *Если φ индуцируется некоторым R-произведением с l сомножителями автоматов из $\langle \mathbf{A}_i | i=1, \ldots, k\rangle$, то φ представляется и некоторой квази-суперпозицией с l сомножительями автоматов из $\langle \mathbf{A}_i | i=1, \ldots, k\rangle$.*

§ 4

Элемент $\mathbf{L}_i \in \mathbf{L}$ $(\mathbf{L}_i \neq \mathbf{L}_e)$ будем называть *минимальным*, если для любого $\mathbf{L}_j \in \mathbf{L}$ из $\mathbf{L}_j \subseteqq \mathbf{L}_i$ вытекает $\mathbf{L}_j = \mathbf{L}_e$, или $\mathbf{L}_j = \mathbf{L}_i$. Относительно минимальных элементов алгебраической системы $\mathbf{L}$ имеет место

Теорема 4. *Элемент $\mathbf{L}_i (\neq \mathbf{L}_e)$ является минимальным тогда и только тогда, если найдется такое $\varphi(: F(X) \to F(Y)) \in \mathbf{L}_i$ и простое число n, что*

(1) $$\mathbf{L}_i = [\varphi],$$

(2a) $$\varphi_p = \varphi_q \ (p, q \in F(X)) \Leftrightarrow d(p) \equiv d(q) (\operatorname{mod} n),$$

или

(1) $$\mathbf{L}_i = [\varphi],$$

(2b) $$\varphi_p = \varphi_q \ (p, q \in F(X)) \Leftrightarrow d(p), d(q) > 0.$$

Для доказательства достаточности сперва предположим, что выполняется (1) и (2a). В этом случае автомат $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, a_0, Y, \delta, \lambda)$ с множеством состояний и с функцией переходов

$$A = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle,$$

$$\delta(a_i, x_j) = \begin{cases} a_{i+1}, & \text{если} \quad i<n-1, \\ a_0, & \text{если} \quad i = n-1 \end{cases}$$

является минимальным автоматом, индуцирующим отображение φ, которое служит базисом семейства $\mathbf{L}_i$.

Если покажем, что для любого отображения ψ в случае $\psi \prec \varphi$ справедливо хотя бы одно из $s(\psi)=1$ и $\varphi \prec \psi$, то будет доказано, что семейство $\mathbf{L}_i$ — минимально. В самом деле, для любого отображения ψ, содержащегося в семействе $\mathbf{L}_j$ ($\subseteqq \mathbf{L}_i$) в случае $s(\psi)=1$ имеем $\mathbf{L}_j=\mathbf{L}_i$, а если существует ψ из $\mathbf{L}_j$ такое, что $\varphi \prec \psi$, то $\mathbf{L}_j=[\psi]=[\varphi]=\mathbf{L}_i$.

Рассмотрим произвольное отображение $\psi\colon F(U) \to F(V)$ из сежейства $\mathbf{L}_i$. Так как $\psi \prec \varphi$, то $\psi=(\varphi, \gamma, \gamma')$, где γ, γ' — подходящие отображения. Принимая во внимание транзитивность отношения $\prec$, это значит, что автомат $\mathbf{B}=$ $=\mathbf{B}(U, B, b_0, V, \delta', \lambda')$, где

$$B = A\,; b_0 = a_0,$$

$$\delta'(a_i, u) = \delta(a_i, \gamma(u)) = \begin{cases} a_{i+1}, & \text{если} \quad i<n-1, \\ a_0, & \text{если} \quad i = n-1, \end{cases}$$

$$\lambda'(a_i, u) = \gamma'(a_i, u) \qquad (a_i \in A, \quad u \in U)$$

индуцирует отображение ψ.

Нетрудно показать (см. [5]), что вес отображения ψ равен числу попарно неэквивалентных состояний автомата $\mathbf{B}$. Докажем, что их число равно 1, или же n. Если разбиваем B на такие классы, что в одном и том же классе содержатся только эквивалентные элементы, то при таком разбиении π для любых состояний a, b и входного сигнала u из $a \equiv b(\pi)$ вытекает $\delta'(a, u) \equiv \delta'(b, u)$ (π). Разбиения с этим последним свойством в дальнейшем будут называться *допустимыми разбиениями* (см. [1]). Поэтому для нашей цели достаточно показать, что $\mathbf{B}$ имеет только тривиальные допустимые разбиения.

Предположим, что π — некоторое допустимое разбиение автомата $\mathbf{B}$, m — максимум мощности классов по π, а $\pi(a)$ — произвольный класс мощности m. Так как $a_i q = a_j q$ тогда и только тогда, если $a_i = a_j$ $(q \in F(U))$, класс $\pi(a_i q)$ также содержит в точности m элементов. Но произвольный класс по π представляется в виде $\pi(aq)$, где q — подходящее слово из $F(U)$. Поэтому, ввиду простоты n, из отношения $m|n$ имеем $m=1$ или $m=n$. Это значит, что $s(\psi)=1$ или $s(\psi)=n$.

В дальнейшем, как уже отметили в начале доказательства, достаточно рассмотреть случай $s(\psi)=n$. Но в этом случае автомат $\mathbf{B}$ является минимальным автоматом, индуцирующим ψ. Рассмотрим пару отображений (ϑ, ϑ'), где ϑ — произвольное отображение множества X в U и для любых $a \in A$ и $x \in X$ $\vartheta'(a, x)=\lambda(a, x)$. Пусть далее $\mathbf{C}=\mathbf{C}(X, C, c_0, Y, \delta_C, \lambda_C)$, где $C=B=A$, $c_0=b_0=a_0$, $\delta_C(a, x)=\delta'(a, \vartheta(x))$ и $\lambda_C(a, x)=\lambda(a, x)$ $(a \in C, x \in X)$. Заметим, что

C индуцирует производное отображение от отображения ψ относительно пары (ϑ, ϑ'). Таким образом $\varphi=(\psi, \vartheta, \vartheta')$, т. е. $\varphi \prec \psi$.

Пусть выполняется теперь (1) и (2b). Покажем опять же, что для любого отображения $\psi(\prec\varphi)$ имеет место $s(\psi)=1$ или же $\varphi\prec\psi$. Достаточно рассмотреть случай $s(\psi)>1$. В этом случае, ввиду леммы 1, $s(\psi)=2$.

Для множества состояний и функции переходов минимального автомата $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, a_0, Y, \delta, \lambda)$, индуцирующего φ, выполняются

$$A = \langle a_0, a_1\rangle,$$
$$\delta(a_0, x) = \delta(a_1, x) = a_1 \qquad (x\in X).$$

Если отображение ψ представляется в виде $\psi=(\varphi, \gamma, \gamma')$, то ψ индуцируется автоматом $\mathbf{B}=\mathbf{B}(U, B, b_0, V, \delta', \lambda')$, где

$$B = A; b_0 = a_0,$$
$$\delta'(a_i, u) = \delta(a_i, \gamma(u)) = a_1 \qquad (a_i\in A, \quad u\in U),$$
$$\lambda'(a_i, u) = \gamma'(a_i, u).$$

Так как вес ψ равен 2, то φ представляется в виде $\varphi=(\psi, \vartheta, \vartheta')$, где ϑ — произвольное отображение множества X в U и для любых $a\in\mathbf{A}$ и $x\in X$ выполняется $\vartheta'(a, x)=\lambda(a, x)$. Этим достаточность условий теоремы 4 доказана.

С обратной стороны предположим, что либо не выполняется (1), либо же не выполняется ни одно из условий (2a) и (2b). Если не имеет место (1), то $\mathbf{L}_i$ обладает таким элементом φ, что $s(\varphi)>1$. В этом случае $[\varphi]\subseteqq\mathbf{L}_i, [\varphi]\neq\mathbf{L}_e$, $[\varphi]\neq\mathbf{L}_i$, т. е. $\mathbf{L}_i$ не минимален.

Итак, предположим, что не выполняется ни одно из (2a) и (2b), но выполняется (1), т. е. $\mathbf{L}_i$ представляется в виде $[\varphi]$ $(\varphi\colon F(X)\to F(Y))$. Обозначим через H_φ множество таких производных отображений $\psi_i=(\varphi, \gamma, \gamma')$ от отображения φ, которые подчинены условиям

$$\psi_i : F(\langle x_i\rangle) \to F(\langle \varphi_p | p\in F(\langle x_i\rangle)\rangle), \quad \text{где } x_i \text{— любой элемент из } X,$$
$$\gamma(x_i) = x_i,$$
$$\gamma'(\varphi_p, x_i) = \varphi_p \qquad (p\in F(\langle x_i\rangle)),$$
$$s(\psi_i) \geqq 2.$$

Множество H_φ непусто, ибо в противном случае φ имело бы вес 1.

Обозначим через $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, a_0, Y, \delta, \lambda)$ минимальный автомат, индуцирующий отображение φ. Тогда, ввиду определения отображений ψ_i минимальные автоматы $\mathbf{B}_i=\mathbf{B}_i(\langle x_i\rangle, B_i, b_{i_0}, B_i, \delta_i, \lambda_i)$, индуцирующие отображения ψ_i — следующие:

$$B_i = \langle a_0 p | p\in F(\langle x_i\rangle)\rangle; \quad b_{i_0} = a_{i_0},$$
$$\delta_i(b, x_i) = \delta(b, x_i) \qquad (b\in B_i),$$
$$\lambda_i(b, x_i) = b.$$

Из этого непосредственно вытекает, что для любого $\psi_i \in H_\varphi$ существуют натуральные числа m_i и n_i так, что

$$b_{i_0}p \neq b_{i_0}q, \quad \text{если} \quad d(p), d(q) < m_i \quad \text{и} \quad p \neq q,$$

$$b_{i_0}p = b_{i_0}q \Leftrightarrow p = q, \quad \text{или} \quad d(p), d(q) \geqq m_i \quad \text{и} \quad d(p) \equiv d(q) \pmod{n_i}.$$

Предположим теперь, что $s(\varphi) > 2$. Будем различать следующие случаи:

(I) существует $\psi_i \in H_\varphi$ так, что $m_i + n_i < s(\varphi)$,
(II) не выполняется (I) и найдется такое $\psi_i \in H_\varphi$, что $m_i \neq 0$,
(III) не выполняются (I) и (II), а n — составное число,
(IV) не выполняются (I) и (II), а n — простое число.

В случае (I), так как вес ψ_i равен $m_i + n_i < s(\varphi)$ и из $\varphi_i \prec \varphi_j$ вытекает $s(\varphi_i) \leqq \leqq s(\varphi_j)$ (см. лемму 1), то φ не будет производным от ψ_i, т. е. $[\psi_i] \subset [\varphi]$, $[\psi_i] \neq \neq [\varphi]$ и $[\psi_i] \neq \mathbf{L}_e$.

Обозначим через ψ_i отображение, удовлетворящее условию (II). В этом случае существует производное ξ_i: $F(\langle x_i \rangle) \to F(\langle z_1, z_2 \rangle)$ от φ так, что $s(\xi_i) = 2$ (здесь z_1, z_2 — произвольные символы). Действительно, в качестве ξ_i можно брать отображение, индуцируемое автоматом $\mathbf{C}_i = \mathbf{C}_i(\langle x_i \rangle, C_i, c_{i0}, \langle z_1, z_2 \rangle, \delta_i', \lambda_i')$, определенным следующим образом

$$C_i = B_i;\, c_{i_0} = b_{i_0},$$

$$\delta_i'(b_{ij}, x_i) = \delta_i(b_{ij}, x_i),$$

$$\lambda_i'(b_{ij}, x_i) = \begin{cases} z_1, & \text{если} \quad j = 0, \\ z_2, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что отображение ξ_i, индуцируемое автоматом $\mathbf{C}$, представляется в виде $\xi_i = (\psi_i, \gamma, \gamma')$, где

$$\gamma(x_i) = x_i,$$

$$\gamma'(\varphi_p, x_i) = \begin{cases} z_1, & \text{если} \quad p = e, \\ z_2, & \text{если} \quad p \neq e \end{cases} \qquad (p \in F(\langle x_i \rangle)).$$

Ввиду транзитивности отношения $\prec$ имеем $\xi_i \prec \varphi$ и так как $s(\xi_i) = 2 < s(\varphi)$, то $[\xi_i] \subset [\varphi]$.

Рассмотрим теперь случай (III), и пусть ψ_i — любое отображение из H_φ, удовлетворящее условию (III). Далее, пусть k — такое натуральное число, что $k|n$ и $1 < k < n$. Тогда нетрудно показать, что вес отображения ξ_i, индуцируемое следующим автоматом $\mathbf{C}_i = \mathbf{C}_i(\langle x_i \rangle, C_i, c_{i_0}, Z_i, \delta_i', \lambda_i')$, равен k:

$$C_i = B_i, \quad c_{i_0} = b_{i_0}, \quad Z_i = \langle z_{i_0}, \ldots, z_{i_{k-1}} \rangle,$$

$$\delta_i'(b_{ij}, x_i) = \delta_i(b_{ij}, x_i),$$

$$\lambda_i'(b_{i_0}p, x_i) = z_{i_l} \Leftrightarrow d(p) \equiv l \pmod{k} \qquad (p \in F(\langle x_i \rangle), \quad 0 \leqq l \leqq k-1).$$

Но ξ_i представимо в виде $\xi_i = (\psi_i, \gamma, \gamma')$, где

$$\gamma(x_i) = x_i,$$

$$\gamma'(\varphi_p, x_i) = z_{i_l} \Leftrightarrow d(p) \equiv l \pmod{k}.$$

Таким образом $\xi_i(\prec \psi_i) \prec \varphi$ и $1 < s(\xi_i) < s(\varphi)$, значит, $[\xi_i] \subset [\varphi]$.

Наконец, рассмотрим случай (IV). Напомним, что минимальный автомат, индуцирующий φ, мы обозначали через $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, a_0, Y, \delta, \lambda)$. Если $\varphi \prec \psi_i$, то автомат Медведева $\mathbf{A}(X, A, a_0, \delta)$ является гомоморфным образом автомата $\mathbf{C}_i=\mathbf{C}_i(X, C_i, c_{i_0}, \delta_i)$, где

$$c_i = \langle c_{i_0}, \dots, c_{i_{n-1}} \rangle,$$

$$\delta_i(c_{ij}, x_i) = \begin{cases} c_{ij+1}, & \text{если} \quad j<n-1, \\ c_{i_0}, & \text{если} \quad j=n-1 \quad (x_i \in X). \end{cases}$$

Так как $s(\varphi)=n$, т. е. $\bar{\bar{A}}=n$, то автомат $\mathbf{A}(X, A, a_0, \delta)$ и $\mathbf{C}_i$ — изоморфны. Поэтому для отображения φ выполняется условие (2а). Получилось противоречие. Таким образом нами установлено, что не имеет место $\varphi \prec \psi_i$. Отсюда $[\psi_i] \subset [\varphi]$. Этим и случай (IV) исследован до конца.

Для окончания доказательства необходимости рассмотрим случай $s(\varphi)=2$. $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, a_0, Y, \delta, \lambda)$ $(\bar{\bar{A}}=2)$ означает по-прежнему автомат, индуцирующий φ. В этом случае произвольный элемент ψ_i из H_φ индуцируется одним из следующих автоматов $\mathbf{B}_i=\mathbf{B}_i(\langle x_i \rangle, B_i, b_{i_0}, \delta_i, \lambda_i)$ и $\mathbf{B}'_i=\mathbf{B}'_i(\langle x_i \rangle, B_i, b_{i_0}, \delta'_i, \lambda'_i)$, где

$$B_i = \langle b_{i_0}, b_{i_1} \rangle,$$

$$\delta_i(b_{ij}, x_i) = \begin{cases} b_{i_1}, & \text{если} \quad j=0, \\ b_{i_0}, & \text{если} \quad j=1, \end{cases}$$

$$\delta'_i(b_{ij}, x_i) = b_{i_1} \qquad (j=0, 1),$$

$$\lambda_i(b_{ij}, x_i) = \lambda'_i(b_{ij}, x_i) = b_{ij} \qquad (j=0, 1).$$

Если $\varphi \prec \psi_i$, то автомат Медведева $\mathbf{A}(X, A, a_0, \delta)$ является гомоморфным образом одного из автоматов $\mathbf{C}_i=\mathbf{C}_i(X, C_i, c_{i_0}, \delta_{i_c})$ и $\mathbf{C}'_i=\mathbf{C}'_i(X, C_i, c_{i_0}, \delta'_{i_c})$, где

$$C_i = B_i; \qquad c_{i_0} = b_{i_0},$$

$$\delta_{i_c}(b_{ij}, x) = \begin{cases} b_{i_1}, & \text{если} \quad j=0, \\ b_{i_0}, & \text{если} \quad j=1, \end{cases}$$

$$\delta'_{i_c}(b_{ij}, x) = b_{i_1} \qquad (j=0, 1; \quad x \in X).$$

Таким образом, ввиду равенства $s(\varphi)=2$, автомат $\mathbf{A}(X, A, a_0, \delta)$ изоморфен одному из автоматов $\mathbf{C}_i$ и $\mathbf{C}'_i$. А в этом случае для φ выполняется (2а) или (2b), что противоречит нашим предположениям. Мы получили, что для произвольного $\psi_i (\in H_\varphi)$ имеет место $[\psi_i] \subset [\varphi]$. Этим теорема 4 полностью доказана.

Применением теоремы 4 получается

Теорема 5. *Алгебраическая система* $\mathbf{L}$ *не обладает конечной совокупностью образующих элементов.*

Рассмотрим конечное число произвольно выбранных из $\mathbf{L}$ элементов $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_k$. Покажем, что существует семейство $\mathbf{L}^* \in \mathbf{L}$ не принадлежащее к подсистеме, порожденной множеством $\langle \mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_k \rangle$. Пусть m означает максимум весов отображений из $\mathbf{L}_1 \cup \dots \cup \mathbf{L}_k$. Если $n(>m)$ — простое число и $\varphi: F(X) \to F(Y)$ такое отображение, что $\varphi_p = \varphi_q \Leftrightarrow d(p) \equiv d(q) \pmod{n}$ $(p, q \in F(X))$, то $[\varphi]\notin\{L_1, ..., L_k\}$. Действительно, так как для любого $\mathbf{L}_i\in\mathbf{L}$ справедливо $\mathbf{L}_i\geqq\mathbf{L}_e$, далее, $\mathbf{L}_e$ — единичный элемент относительно сложения и умножения, а умножение и сложение — монотонные операции, то $\mathbf{L}_i\oplus\mathbf{L}_j\supseteqq\mathbf{L}_i,\mathbf{L}_i\oplus\mathbf{L}_j\supseteqq\mathbf{L}_j$, и $\mathbf{L}_i\odot\mathbf{L}_j\supseteqq\mathbf{L}_i,\mathbf{L}_j$ $(\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j\in\mathbf{L})$. По теореме 4 неравенство $\mathbf{L}_i\leqq[\varphi]$ справедливо для единственного $\mathbf{L}_e$, т. е. элемент $[\varphi]$ не получается из отличных от него элементов путем применения сложения и умножения. Кроме того, $[\varphi]$ не содержится в рассмотренном множестве $\langle\mathbf{L}_1, ..., \mathbf{L}_k\rangle$. Теорема 5 доказана.

Совокупность $N=\langle\mathbf{L}_i|i=1, 2, ...\rangle$ образующих алгебраической системы $\mathbf{L}$ мы называем *минимальной*, если для произвольного $\mathbf{L}_i\in N$ множеством $N\backslash\mathbf{L}_i$ $\mathbf{L}$ уже не порождается.

Теорема 6. *Алгебраическая система* $\mathbf{L}$ *обладает минимальной совокупностью образующих, и произвольная ее совокупность образующих содержит минимальную совокупность образующих элементов.*

Заметим тот простой факт, что существует лишь конечное число таких семейств, весы отображений которых не провосходят данное натуральное число m.

Обозначим через G^m множество всех таких семейств, вес каждого отображения которых не больше, чем m. Так как G^m — конечно, то существует подмножество $H^m\subseteqq G^m$ так, что справедливы $\{H^m\}\supseteqq G^m$ и $\{H^m\backslash\mathbf{L}_m\}\not\supseteqq G^m$ для любого $\mathbf{L}_m\in H^m$. Присоединим H^m к множеству всех таких отображений из $G^{m+1}\backslash G^m$, которые не содержатся в $\{H^m\}$. Из полученного множества можно выбрать подмножество H^{m+1} так, что $\{H^{m+1}\}\supseteqq G^{m+1}$ и $\{H^{m+1}\backslash\mathbf{L}_{m+1}\}\not\supseteqq G^{m+1}$ $(\mathbf{L}_{m+1}\in H^{m+1})$. Выполняется и отношение $H^m\subseteqq H^{m+1}$, так как ни один $\mathbf{L}_m$ из H^m не содержится в $\{H^{m+1}\backslash\mathbf{L}_m\}$.

Объединение $H=H^m\cup H^{m+1}\cup ...$ полученных множеств H^i $(i=m, m+1, ...)$ является минимальной совокупностью образующих. Действительно, ни один $\mathbf{L}_m\in H$ не содержится в $\{H\backslash\mathbf{L}_m\}$, так как выполняются $H^m\subseteqq H^{m+1}\subseteqq ...$ и $\mathbf{L}_m\in H^i$ для некоторого $i\geqq m$.

Пусть S_1 — некоторая совокупность образующих алгебраической системы $\mathbf{L}$ и $S_1^m=G^m\cap S_1$. Из-за монотонности операций очевидно, что справедливо $G^m\subseteqq\{S_1^m\}$. Обозначим через S^m такое подмножество множества S_1^m, которое обладает свойствами, потребованными в предыдущих рассуждениях от H^m. Так как $S_2^{m+1}=G^{m+1}\cap S_1$ содержит S_1^m, то справедливо и включение $S^m\subseteqq S_2^{m+1}$. Пусть $S_1^{m+1}=S^m\cup S_2^{m+1}\backslash\{S^m\}$, а S^{m+1} — такое подмножество множества S_1^{m+1}, которое обладает свойствами, потребованными от H^{m+1}. Ясно, что $S=S^m\cup S^{m+1}\cup ...$ является минимальной совокупностью образующих и $S\subseteqq S_1$. Этим теорема 6 доказана.

§ 5

Пусть φ: $F(X)\to F(Y)$ — произвольное автоматное отображение. Обозначим через φ': $F(X)\to F(\langle\varphi_p|p\in F(X)\rangle)$ отображение, отображающее любое слово $p\in F(X)$ $(d(p)=n)$ в слово $\varphi_{p(1)}\ ...\ \varphi_{p(n)}$. Разобьем множество X на такие классы, что x и x' $(x, x'\in X)$ содержятся в одном и том же классов, тогда и только тогда, если $\varphi_{px}=\varphi_{px'}$ для всех $p\in F(X)$, а полученное разбиение обозначим через π. Выбирая по одному элементу из каждого такого класса, полученное так множество обозначим через $\bar{X}$. Пусть φ^*: $F(\bar{X}) \to F(\langle \varphi_p | p \in F(X) \rangle)$ — отображение, для которого выполняется $\varphi^*(q) = \varphi'(q)$ $(q \in F(\bar{X}))$ при каждом $q \in F(\bar{X})$. Нетрудно показать, что $\varphi^* \prec \varphi' \prec \varphi$ и $\varphi \prec \varphi' \prec \varphi^*$. [6])

Рассмотрим произвольный базис $\langle \varphi^1, \ldots, \varphi^k \rangle$ семейства $\mathbf{L}_i$. Базис $\langle \varphi^1, \ldots, \varphi^k \rangle$ назовем *минимальным*, если $[\langle \varphi^1, \ldots, \varphi^k \rangle \backslash \varphi^i] \neq \mathbf{L}_i$ для любого $\varphi^i \in \langle \varphi^1, \ldots, \varphi^k \rangle$. Легко убедиться в том, что *если* $\langle \varphi^1, \ldots, \varphi^k \rangle$ *является базисом* $\mathbf{L}_i$, *то* и $\langle \varphi^{1*}, \ldots, \varphi^{k*} \rangle$ *является базисом* $\mathbf{L}_i$. Далее, *если* $\langle \varphi^1, \ldots, \varphi^k \rangle$ *— минимальный базис* $\mathbf{L}_i$, то и $\langle \varphi^{1*}, \ldots, \varphi^{k*} \rangle$ *— минимальный базис* $\mathbf{L}_i$.

По определению отображения φ^* видно, что минимальный базис $\langle \varphi^{1*}, \ldots, \varphi^{k*} \rangle$ будет „самым простым" в том смысле, что оно не обладает „лишными сигналами".

Минимальные базисы $\langle \varphi^{1*}, \ldots, \varphi^{k*} \rangle$ семейства $\mathbf{L}_i$ отображений однозначно определены, как показывает следующая

Теорема 7. *Если* $\langle \varphi^1, \ldots, \varphi^k \rangle$ *и* $\langle \psi^1, \ldots, \psi^l \rangle$ *— минимальные базисы одного и того же семейств отображений, то* $k = l$; *далее, можно установить между множествами* $\langle \varphi^{1*}, \ldots, \varphi^{k*} \rangle$ *и* $\langle \psi^{1*}, \ldots, \psi^{k*} \rangle$ *взаимно однозначное соответствие так, что соответствующие отображения изоморфны.*

Пусть $\langle \varphi^1, \ldots, \varphi^k \rangle$, $\langle \psi^1, \ldots, \psi^l \rangle$ — минимальные базисы семейства $\mathbf{L}_i$ отображений. Тогда для любого ψ^i $(i = 1, \ldots, l)$ найдется φ^j $(1 \leqq j \leqq k)$ так, что $\psi^i \prec \varphi^j$. С другой стороны справедливо и отношение $\varphi^j \prec \psi^i$, так как в противном случае, из транзитивности отношения $\prec$ и выполнения $\varphi^j \prec \psi^u$ $(u \neq i, 1 \leqq u \leqq l)$ получалось бы $\psi^i (\prec \varphi^j) \prec \psi^u$, что противоречит минимальности базиса $\langle \psi^1, \ldots, \psi^l \rangle$. Поэтому для любого ψ^i $(i = 1, \ldots, l)$ существует φ^j $(1 \leqq j \leqq k)$ так, что $[\psi^i] = [\varphi^j]$. Таким же образом можно показать, что для произвольного φ^j $(j = 1, \ldots, k)$ найдется ψ^i $(1 \leqq i \leqq l)$ так, что $[\varphi^j] = [\psi^i]$. Так мы установили, что $k = l$ и существует взаимно однозначное соответствие между $\langle \varphi^1, \ldots, \varphi^k \rangle$ и $\langle \psi^1, \ldots, \psi^k \rangle$ так, что для соответствующих друг другу φ^j, ψ^i имеем $[\varphi^j] = [\psi^i]$ $(i, j = 1, \ldots, k)$. Остается показать, что из $[\varphi] = [\psi]$ $(\varphi, \psi \in L)$ вытекает существование изоморфизма между φ^* и ψ^*. Пусть φ^* и ψ^* имеют вид φ^*: $F(X) \to F(Y)$ и ψ^*: $F(U) \to F(V)$. Так как $[\varphi^*] = [\psi^*]$, то выполняется равенство $\varphi^* = (\psi^*, \gamma, \gamma')$, где γ, γ' — подходящие отображения.

---

[6]) Легко видеть, что пары отображений, для которых $\varphi^* = (\varphi', \vartheta, \vartheta')$ и $\varphi' = (\varphi, \gamma, \gamma')$ — следующие:

$$\vartheta(\bar{x}) = \bar{x} \qquad (\bar{x} \in \bar{X}),$$

$$\vartheta'(\varphi'_p, \bar{x}) = \varphi'_p(\bar{x}) \qquad (p \in F(X), \quad \bar{x} \in \bar{X}),$$

$$\gamma(x) = x \qquad (x \in X),$$

$$\gamma'(\varphi_p, x) = \varphi_p \qquad (p \in F(X), \quad x \in X).$$

А пары отображений, обезпечивающие равенства $\varphi = (\varphi', \varrho, \varrho')$ и $\varphi' = (\varphi^*, \tau, \tau')$ — следующие:

$$\varrho(x) = x \qquad (x \in X),$$

$$\varrho'(\varphi'_p, x) = (\varphi'_p(x))(x) \qquad (p \in F(X), x \in X),$$

$$\tau(x) = \bar{x}(x \in X, \bar{x} \in \bar{X} \quad \text{и} \quad x \equiv \bar{x}(\pi)),$$

$$\tau'(\varphi^*_p, x) = \varphi^*_p(\bar{x}) \qquad (p \in F(\bar{X}), \quad x \in X, \quad \bar{x} \in \bar{X} \quad \text{и} \quad x \equiv \bar{x}(\pi)).$$

Отображение $\gamma: X \to V$ является взаимно однозначным. Действительно, если существуют $x, x' (\in X;\ x \neq x')$, для которых $\gamma(x) = \gamma(x')$, то выполняется $\varphi^*_{px} = \varphi^*_{px'}$ при любом $p \in F(X)$. Но это противоречит определению отображения φ^*. Далее, так как для произвольного $p = x_1 \dots x_n \in F(X)$

$$(*) \qquad \gamma'(\psi^*, p) = \gamma'(\psi^*, x_1) \cdot \gamma'(\psi^*_{\gamma(x_1)}, x_2) \dots \gamma'(\psi^*_{\gamma(x_1 \dots x_{n-1})}, x_n) =$$
$$= \varphi^* \varphi^*_{x_1} \dots \varphi^*_{x_1 \dots x_{n-1}}$$

и $\gamma: F(X) \to F(U)$ — взаимно однозначное отображение, то $\varrho(\varphi^*_p) = \psi^*_{\gamma(p)}$ является взаимно однозначным отображением множества $\langle \varphi^*_p |\, p \in F(X) \rangle$ в $\langle \psi^*_{\gamma(p)} \,|\, p \in F(X) \rangle$. Из равенства $(*)$ вытекает, что (γ, ϱ) изоморфно отображает φ^* в ψ^*.

Обратно, так как ψ^* представляется в виде $\psi^* = (\varphi^*, \vartheta, \vartheta')$, то можно доказать аналогичным путем, что ψ^* изоморфно отображается в φ^*. Значит, φ^* и ψ^* изоморфны. Теорема 7 доказана.

Литература

[1] Ф. Гечег, О композиции автоматов без петель, *Acta Sci. Math.*, **26** (1965), 269—272.
[2] F. Gécseg, On *R*-products of automata. II, *Studia Sci. Math. Hung.*, **1** (1966), 443—447.
[3] G. N. Raney, Sequential functions, *J. Assoc. Comput. Mach.*, **5**:2 (1958), 177—180. (Дж. Н. Рени, Последовательностные функции, *Кибернетический сборник*, **3** (1961).
[4] L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems* (Oxford—London—New York—Paris, 1963).
[5] В. М. Глушков, Абстрактная теория автоматов, *УМН*, **16**/**5** (1961), 3—63.

(Поступило 20/IV/1966 г.)